文章编号:1005-3085(2011)02-0165-11

一类基于综合害虫管理策略的捕食系统的动力学性质*

王玲书[1,2]， 徐 瑞[2]， 冯光辉[2]

(1- 河北经贸大学数学与统计学学院，石家庄 050061;
2- 军械工程学院应用数学研究所，石家庄 050003)

摘 要: 本文基于综合害虫管理策略，研究了一类具有脉冲效应的捕食模型并对其动力学性质进行了分析．根据Floquet乘子理论和脉冲微分方程的比较定理，证明了当脉冲周期小于某个临界值时，系统存在一个全局渐近稳定的害虫根除周期解，给出了系统持续生存的充分条件．数值分析进一步说明了系统的动力学性质及综合害虫管理策略的有效性．

关键词: 综合害虫管理；脉冲；持续生存；灭绝

分类号: AMS(2000) 34A37; 92D25 **中图分类号**: O175.1 **文献标识码**: A

1 引言

农药的长期使用，使害虫产生了抗药性，再加上害虫的高出生率及气候等原因，虫害很容易爆发．例如，2000年美国密执安州大豆蚜虫的泛滥，2002年中国一些地区的蝗灾等都造成了严重的经济损失．因此，害虫控制是关系到经济发展的一个非常重要的问题．近二十年来，出现了许多控制害虫的方法，其中，综合害虫管理[1,2]是使经济损失达到最小的一种非常有效的方法，它主要包括生物控制和化学控制两种方法．生物控制[3]通过释放天敌(捕食者)或利用病理来控制害虫(食饵)，是近年来备受重视的生物防治的一个领域，因其可以避免化学药剂带来的问题而日益受到重视；化学控制是通过喷洒杀虫剂来控制害虫，它能使害虫数量迅速减少，尤其当害虫数量太大释放天敌不足以控制害虫或考虑到释放天敌的成本时，必须使用杀虫剂来控制害虫．实践证明，综合害虫管理比任何一种传统的方法都更有效．

在经典的捕食模型中，人们总假定每个捕食者具有相同的捕食和生产能力．这个假设对许多动物来说似乎是不切实际的．在自然界中，物种的增长常常有一个成长发育的过程，如从幼年到成年等，而且在其成长的每一个阶段都会表现出不同的特征．因此，考虑具有阶段结构的种群模型更具有实际意义．近年来，具有阶段结构的种群动力学模型已引起了许多学者的关注．在文献[4,5]中，作者考虑了下面的捕食模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=rx(t)-ax^2(t)-\frac{a_1x(t)y_2(t)}{1+mx(t)}, \\ \dot{y}_1(t)=\frac{a_2x(t)y_2(t)}{1+mx(t)}-(r_1+d)y_1(t), \\ \dot{y}_2(t)=dy_1(t)-r_2y_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中$x(t)$表示食饵(害虫)在时刻t的种群密度，$y_1(t)$, $y_2(t)$分别表示捕食者(天敌)幼体和成体在时刻t的种群密度．a, a_1, a_2, d, r, r_1和r_2为正常数，其具体的生物意义可以参考文献[4]．

收稿日期: 2009-06-29. **作者简介**: 王玲书(1976年6月生)，女，博士，副教授. 研究方向：生物数学.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10671209; 10926064)；河北省教育厅科学研究计划项目(2009114).

对于系统(1)，由文献[4]可知，平衡点$E_1(0,0,0)$是不稳定的；当$r_2(r_1+d)\geq\frac{a_2rd}{a+mr}$时，边界平衡点$E_2(\frac{r}{a},0,0)$是全局渐近稳定的；当$r_2(r_1+d)<\frac{a_2rd}{a+mr}$时，系统是持续生存的．因此，用一次性引进天敌的方法控制害虫并不有效．本文通过周期投放天敌和喷洒杀虫剂对系统(1)进行改进，考虑如下脉冲微分方程

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{x}(t)=rx(t)-ax^2(t)-\frac{a_1x(t)y_2(t)}{1+mx(t)}\\&\dot{y_1}(t)=\frac{a_2x(t)y_2(t)}{1+mx(t)}-(r_1+d)y_1(t)\\&\dot{y_2}(t)=dy_1(t)-r_2y_2(t)\end{aligned}\right\}t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau,\\\left.\begin{aligned}&\Delta x(t)=-px(t)\\&\Delta y_1(t)=-p_1y_1(t)\\&\Delta y_2(t)=-p_2y_2(t)\end{aligned}\right\}t=(n+l-1)\tau,\\\left.\begin{aligned}&\Delta x(t)=0\\&\Delta y_1(t)=u_1\\&\Delta y_2(t)=u_2\end{aligned}\right\}t=n\tau,\end{cases}\tag{2}$$

其中$\triangle x(t)=x(t^+)-x(t)$，$\triangle y_i(t)=y_i(t^+)-y_i(t)$，$\tau$是脉冲周期，$n\in Z_+=\{1,2,\cdots\}$，$0\leq p$，$p_i<1$分别表示在$t=(n+l-1)\tau$时刻由于杀虫剂的使用导致害虫和天敌死亡的比例，$u_i>0$，$i=1,2$是在$t=n\tau$时刻释放天敌的数量．

2 害虫根除周期解的全局渐近稳定性

令$f=(f_1,f_2,f_3)$是系统(2)前三个方程的右端映射，显然f的光滑性保证了解的存在唯一性．设$z(t)=(x(t),y_1(t),y_2(t))$是系统(2)的解，容易证明下面引理成立．

引理2.1 设$z(t)$是系统(2)的满足初始条件$z(0^+)\geq 0$的解，于是对所有的$t\geq 0$都有$z(t)\geq 0$，并且若$z(0^+)>0$，则$z(t)>0$．

引理2.2 系统(2)的所有正解是一致最终有界的，即存在一个正常数M，当t充分大时，有$x(t)\leq M$，$y_i(t)\leq M$ $(i=1,2)$．

考虑(2)的子系统

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{y_1}(t)=-(r_1+d)y_1(t)\\&\dot{y_2}(t)=dy_1(t)-r_2y_2(t)\end{aligned}\right\}t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau,\\\left.\begin{aligned}&y_1(t^+)=(1-p_1)y_1(t)\\&y_2(t^+)=(1-p_2)y_2(t)\end{aligned}\right\}t=(n+l-1)\tau,\\\left.\begin{aligned}&y_1(t^+)=u_1+y_1(t)\\&y_2(t^+)=u_2+y_2(t)\end{aligned}\right\}t=n\tau.\end{cases}\tag{3}$$

引理 2.3 系统 (3) 存在一个全局渐近稳定的正周期解 $(y_1^*(t),\ y_2^*(t))$，其中

$$y_1^*(t)=\begin{cases}\dfrac{u_1\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}, & n\tau<t\le(n+l)\tau,\\[2ex] \dfrac{u_1(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}, & (n+l)\tau<t\le(n+1)\tau,\end{cases}\tag{4}$$

$$y_2^*(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{u_2}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}+\dfrac{du_1(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}+(p_2-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau})}\right]\mathrm{e}^{-r_2(t-n\tau)}\\ \quad-\dfrac{du_1\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})}, \quad n\tau<t\le(n+l)\tau,\\ \left[\dfrac{u_2(1-p_2)}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}+\dfrac{du_1(1-p_2)(p_2-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau}}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau})}\right.\\ \quad\left.+\dfrac{du_1(1-p_2)}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau})}\right]\mathrm{e}^{-r_2(t-n\tau)}\\ \quad-\dfrac{du_1(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})}, \quad (n+l)\tau<t\le(n+1)\tau.\end{cases}$$

证明 在区间 $n\tau<t\le(n+1)\tau$ 上求解 (3)，可以得到

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l} y_1(t)=y_1(n\tau^+)\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-n\tau)}\\ y_2(t)=y_2(n\tau^+)\mathrm{e}^{-r_2(t-n\tau)}\\ \qquad+\frac{dy_1(n\tau^+)}{r_1+d-r_2}\left[\mathrm{e}^{-r_2(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-n\tau)}\right]\end{array}\right\} n\tau<t\le(n+l)\tau,\\ \left.\begin{array}{l} y_1(t)=y_1\big((n+l)\tau^+\big)\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}\\ y_2(t)=y_2\big((n+l)\tau^+\big)\mathrm{e}^{-r_2(t-(n+l)\tau)}\\ \qquad+\frac{dy_1((n+l)\tau^+)}{r_1+d-r_2}\left[\mathrm{e}^{-r_2(t-(n+l)\tau)}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}\right]\end{array}\right\} (n+l)\tau<t\le(n+1)\tau,\\ y_i(n\tau^+)=u_i+y_i(n\tau),\\ y_i\big((n+l)\tau^+\big)=(1-p_i)y_i\big((n+l)\tau\big), \quad i=1,2.\end{cases}\tag{5}$$

令 $y_i(n\tau^+)=y_i((n+1)\tau^+)$, $i=1,2$，代入上式可以得到系统 (3) 的 τ 周期解 $(y_1^*(t),y_2^*(t))$. 进一步，由 (5) 可以得到迭代映射

$$\begin{cases}y_1(n\tau^+)=u_1+(1-p_1)y_1\big((n-1)\tau^+\big)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau},\\ y_1\big((n+l)\tau^+\big)=(1-p_1)y_1(n\tau^+)\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau},\\ y_2(n\tau^+)=u_2+(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}y_2\big((n-1)\tau^+\big)+\frac{d(1-p_2)(\mathrm{e}^{-r_2\tau}-\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)\tau-r_2\tau})}{r_1+d-r_2}y_1\big((n-1)\tau^+\big)\\ \qquad+\frac{d(\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau})}{r_1+d-r_2}y_1\big((n+l-1)\tau^+\big),\\ y_2\big((n+l)\tau^+\big)=(1-p_2)y_2(n\tau^+)\mathrm{e}^{-r_2l\tau}+\frac{d(1-p_2)(\mathrm{e}^{-r_2l\tau}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau})}{r_1+d-r_2}y_1(n\tau^+),\end{cases}$$

由此可以得到

$$y_1(n\tau^+)=\frac{u_1[1-(1-p_1)^n\mathrm{e}^{-n(r_1+d)\tau}]}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}+y_1(0^+)(1-p_1)^n\mathrm{e}^{-n(r_1+d)\tau},$$

$$y_1\big((n+l)\tau^+\big)=(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau}\left[\frac{u_1(1-(1-p_1)^n\mathrm{e}^{-n(r_1+d)\tau})}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}+y_1(0^+)(1-p_1)^n\mathrm{e}^{-n(r_1+d)\tau}\right],$$

$$y_2(n\tau^+) = \Big[u_2 + \frac{d(1-p_2)(\mathrm{e}^{-r_2\tau} - \mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau - r_1\tau})}{r_1+d-r_2} y_1(n\tau^+)$$
$$+ dy_1\big((n+l)\tau^+\big)\frac{\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau} - \mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau}}{r_1+d-r_2}\Big]\frac{1-(1-p_2)^n\mathrm{e}^{-nr_2\tau}}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}$$
$$+ y_2(0^+)(1-p_2)^n\mathrm{e}^{-nr_2\tau},$$
$$y_2\big((n+l)\tau^+\big) = \frac{d(1-p_2)y_1(n\tau^+)(\mathrm{e}^{-r_2l\tau} - \mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau})}{r_1+d-r_2} + (1-p_2)y_2(n\tau^+)\mathrm{e}^{-r_2l\tau},$$

这样就可以得到

$$\lim_{t\to+\infty}\big(y_1(t),y_2(t)\big) = \big(y_1^*(t),y_2^*(t)\big),$$

即系统 (3) 的周期解是全局渐近稳定的.

定理 2.1 设 $z(t)=(x(t),y_1(t),y_2(t))$ 是系统 (2) 的具有正初值的解，假设

$$r\tau - \frac{aa_1}{a+mr}\int_0^\tau y_2^*(t)\mathrm{d}t < \ln\frac{1}{1-p} \tag{6}$$

成立，则 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的，其中

$$\int_0^\tau y_2^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{r_2(1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau})}\Big[\Big(u_2+\frac{du_1}{r_1+d-r_2}\Big)(1-p_2\mathrm{e}^{-r_2l\tau}-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau})$$
$$+\frac{du_1(1-p_2)(p_2-p_1)(1-\mathrm{e}^{-r_2\tau})\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau}}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})}\Big]$$
$$-\frac{du_1(1-p_1\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau}-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})}.$$

证明 首先证明局部稳定性. 令 $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=y_1(t)-y_1^*(t)$, $x_3(t)=y_2(t)-y_2^*(t)$, 则系统 (2) 的线性化系统为

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\dot{x}_1(t) = \big(r-a_1y_2^*(t)\big)x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) = a_2y_2^*(t)x_1(t)-(r_1+d)x_2(t)\\ \dot{x}_3(t) = dx_2(t)-r_2x_3(t)\end{array}\right\} t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau,\\ x_1\big((n+l-1)\tau^+\big) = (1-p)x_1\big((n+l-1)\tau\big),\\ x_2\big((n+l-1)\tau^+\big) = (1-p_1)x_2\big((n+l-1)\tau\big),\\ x_3\big((n+l-1)\tau^+\big) = (1-p_2)x_3\big((n+l-1)\tau\big),\\ x_i(n\tau^+) = x_i(n\tau),\quad i=1,2,3,\end{cases}$$

定义

$$A(t)=\begin{pmatrix} r-a_1y_2^*(t) & 0 & 0\\ a_2y_2^*(t) & -(r_1+d) & 0\\ 0 & d & -r_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1-p & 0 & 0\\ 0 & 1-p_1 & 0\\ 0 & 0 & 1-p_2\end{pmatrix},$$

根据脉冲微分方程的 Floquet 乘子理论[6]，如果单值矩阵

$$M(\tau)=B\mathrm{e}^{\int_0^\tau A(t)\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}(1-p)\mathrm{e}^{\int_0^\tau (r-a_1y_2^*(t))\mathrm{d}t} & 0 & 0\\ * & (1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau} & 0\\ * & * & (1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}\end{pmatrix}$$

的特征值的模小于1，则周期解 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是局部渐近稳定的．实际上，$M(\tau)$ 的特征值

$$0<\lambda_2=(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}<1,\quad 0<\lambda_3=(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}<1,$$

因此当

$$0<\lambda_1=(1-p)\mathrm{e}^{\int_0^\tau (r-a_1y_2^*(t))\mathrm{d}t}<1$$

时，$(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是局部渐近稳定的．

其次，证明 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局吸引的．由式 (6)，可以取 $\varepsilon>0$，使得

$$\sigma\triangleq(1-p)\mathrm{e}^{\int_0^\tau (r-b(y_2^*(t)-\varepsilon))\mathrm{d}t}<1.$$

由引理 2.3 和脉冲微分方程的比较定理有，当 t 充分大时，不等式 $y_2(t)>y_2^*(t)-\varepsilon$ 成立．不妨假设对所有的 $t\geq 0$ 上式成立，这样由 (2) 可知

$$\begin{cases}\dot{x}(t)<x(t)\big[r-b(y_2^*(t)-\varepsilon)\big], & t\neq(n+l-1)\tau,\\ x(t^+)=(1-p)x(t), & t=(n+l-1)\tau,\end{cases}\tag{7}$$

在 $((n+l-1)\tau,(n+l)\tau]$ 上求解上式，可以得到

$$\begin{aligned}x\big((n+l)\tau\big) &< x\big((n+l-1)\tau^+\big)\mathrm{e}^{\int_{(n+l-1)\tau}^{(n+l)\tau}(r-b(y_2^*(t)-\varepsilon))\mathrm{d}t}\\ &= x\big((n+l-1)\tau\big)(1-p)\mathrm{e}^{\int_0^\tau(r-b(y_2^*(t)-\varepsilon))\mathrm{d}t}\\ &= x\big((n+l-1)\tau\big)\sigma,\end{aligned}$$

由此可以得到 $x\big((n+l)\tau\big)<x(l\tau)\sigma^n$，于是有

$$\lim_{n\to+\infty}x\big((n+l)\tau\big)=0.$$

另一方面，当 $t\in((n+l-1)\tau,(n+l)\tau]$ 时，$0<x(t)\leq x((n+l-1)\tau)(1-p)\mathrm{e}^{r\tau}$，所以当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to 0$．由此可知存在 T_0，使得 $t\geq T_0$ 时，$0<x(t)<\varepsilon$．

不妨设 $t\geq 0$ 时，$0<x(t)<\varepsilon$，于是由引理 2.2 和 (2) 可以得到 $\dot{y}_1(t)<a_2M\varepsilon-(r_1+d)y_1(t)$．考虑

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&\dot{y}_1(t)=a_2M\varepsilon-(r_1+d)y_1(t)\\ &\dot{y}_2(t)=dy_1(t)-r_2y_2(t)\end{aligned}\right\}t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau,\\ y_i\big((n+l-1)\tau^+\big)=(1-p_i)y_i\big((n+l-1)\tau\big),\\ y_i(n\tau^+)=u_i+y_i(n\tau),\quad i=1,2,\end{cases}\tag{8}$$

对任意初值 $(y_1(0^+),y_2(0^+))$，求解 (8) 可以得到，当 $n\tau<t\le(n+l)\tau$ 时，有

$$\begin{cases} y_1(t)=y_1^*(t)+(1-p_1)^n\Big[y_1(0^+)-\frac{u_1}{1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big]e^{-(r_1+d)t} \\ \qquad +\frac{\varepsilon a_2M}{r_1+d}\Big[1-(1-p_1)^n e^{-(r_1+d)t}-\frac{p_1(e^{(r_1+d)n\tau}-(1-p_1)^n)e^{-(r_1+d)(t+(1-l)\tau)}}{1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big], \\ y_2(t)=y_2^*(t)+f_1e^{-r_2t}+f_2e^{-r_2(t-n\tau)}+\varepsilon a_2Mdf_3-\frac{dy_1(0^+)(1-p_1)^n}{r_1+d-r_2}e^{-(r_1+d)t}, \end{cases}$$

当 $(n+l)\tau<t\le(n+1)\tau$ 时，有

$$\begin{cases} y_1(t)=y_1^*(t)+(1-p_1)^{n+1}\Big[y_1(0^+)-\frac{u_1}{1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big]e^{-(r_1+d)t} \\ \qquad +\frac{\varepsilon a_2M}{r_1+d}\Big[1-(1-p_1)^{n+1}e^{-(r_1+d)t}-\frac{p_1e^{l\tau}(e^{(r_1+d)n\tau}-(1-p_1)^{n+1}e^{-(r_1+d)\tau})e^{-(r_1+d)t}}{1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big], \\ y_2(t)=y_2^*(t)+g_1e^{-r_2t}+g_2e^{-r_2(t-n\tau)}+\varepsilon a_2Mdg_3-\dfrac{dy_1(0^+)(1-p_1)^{n+1}}{r_1+d-r_2}e^{-(r_1+d)t}, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} f_1={}&(1-p_2)^n\Big[y_2(0^+)-\frac{u_2}{1-(1-p_2)e^{-r_2\tau}} \\ &-\frac{du_1e^{-r_2\tau}(1-p_2)(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})(1-(1-p_1)^{n-1}e^{-(n-1)(r_1+d)\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-p_2)e^{-r_2\tau})}\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2={}&\frac{dy_1(0^+)(1-p_1)^ne^{-(r_1+d)n\tau}}{r_1+d-r_2}\Big[1+\frac{e^{(1-l)(r_1+d)\tau-r_2\tau}(1-p_2)(1-(1-p_2)^ne^{-r_2n\tau})}{1-(1-p_2)e^{-r_2\tau}} \\ &\times\big(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau}+e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}\big)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3={}&\frac{1}{r_2(r_1+d)}+\frac{e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}-\frac{e^{-r_2(t-n\tau)}}{r_2(r_1+d-r_2)} \\ &+\frac{e^{-r_2(t-n\tau)}-(1-p_2)^ne^{-r_2t}}{1-(1-p_2)e^{-r_2\tau}}(1-p_2)\Big[\frac{e^{-r_2(1-l)\tau}}{r_2(r_1+d)}+\frac{e^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} \\ &-\frac{e^{-r_2\tau}}{r_2(r_1+d-r_2)}\Big]+\frac{d}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}\frac{e^{-r_2(t-n\tau)}-(1-p_2)^ne^{-r_2t}}{(1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-p_2)e^{-r_2\tau})} \\ &\times\big[(1-(1-p_1)^{n-1}e^{-(n-1)(r_1+d)\tau})(1-p_1)e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau}\big] \\ &\times\big((1-p_2)e^{-r_2\tau}(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})+(1-p_1)e^{-(r_1+d)l\tau}(e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}) \\ &+(1-e^{-(r_1+d)l\tau})(e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau})\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1={}&(1-p_2)^{n+1}\Big[y_2(0^+)-\frac{u_2}{1-(1-p_2)e^{-r_2\tau}} \\ &-\frac{du_1(1-p_1)(e^{-r_2\tau-(r_1+d-r_2)l\tau}-e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-p_1)^{n-1}e^{-(r_1+d)\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-p_2)e^{-r_2\tau})}\Big], \end{aligned}$$

$$g_2=\frac{dy_1(0^+)(1-p_2)(1-p_1)^n}{r_1+d-r_2}\Big[1+\frac{\mathrm{e}^{-r_2\tau}(1-\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau})+\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau}}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}\Big],$$

$$\begin{aligned}g_3=&\big(1+\mathrm{e}^{-r_2(t-(n+l)\tau)}\big)\Big(\frac{1}{r_2(r_1+d)}+\frac{\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}}{(r_1+d)(r_1+d-r2)}-\frac{\mathrm{e}^{-r_2(t-(n+l)\tau)}}{r_2(r_1+d-r_2)}\Big)\\&+(1-p_2)\frac{\mathrm{e}^{-r_2(t-(n+l)\tau)}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}\Big[\frac{\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau}}{r_2(r_1+d)}+\frac{\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}\\&-\frac{\mathrm{e}^{-r_2\tau}}{r_2(r_1+d-r_2)}+\frac{(1-\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau})(\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}\Big]\\&+\big(1-p_1\mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau}-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}\big)\\&\times\frac{(1-(1-p_1)^{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)(r_1+d)\tau})[\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau}-\mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau}+(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}(1-\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau})]}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)(1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau})}.\end{aligned}$$

这样，当t充分大时，就可以得到$y_1(t)<y_1^*(t)+\varepsilon_1$，$y_2(t)<y_2^*(t)+\varepsilon_1$.

另一方面，由(2)可以得到$\dot{y}_1(t)\geq-(r_1+d)y_1(t)$. 于是由引理2.3和比较定理可知，当$t$充分大时，有$y_1(t)>y_1^*(t)-\varepsilon_1$，$y_2(t)>y_2^*(t)-\varepsilon_1$.

由以上分析可知

$$\lim_{t\to\infty}\big(y_1(t),y_2(t)\big)=\big(y_1^*(t),y_2^*(t)\big).$$

3　系统的持续生存

定理3.1　如果

$$r\tau-a_1\int_0^\tau y_2^*(t)\mathrm{d}t>\ln\frac{1}{1-p}\tag{9}$$

成立，则系统(2)是持续生存的.

证明　由引理2.2可知存在常数$M>0$，当t充分大时，$x(t)\leq M$，$y_i(t)\leq M\,(i=1,2)$，不妨设$t\geq 0$时，$x(t)\leq M$，$y_i(t)\leq M$. 因此，要证系统(2)是持续生存的，仅需证明存在常数$m_j>0\,(j=1,2,3)$，使得$x(t)\geq m_1$，$y_1(t)\geq m_2$，$y_2(t)\geq m_3$. 由(2)可得$\dot{y}_1(t)\geq-(r_1+d)y_1(t)$，则由引理2.3可知，对任意的$\varepsilon>0$，当$t$充分大时，$y_1(t)\geq y_1^*(t)-\varepsilon$. 因此，当$t$充分大时，有

$$y_1(t)\geq\frac{u_1(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}-\varepsilon\triangleq m_2.$$

类似可得，当t充分大时，有

$$y_2(t)\geq\frac{u_2(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}-\varepsilon\triangleq m_3.$$

下面只需要证明存在一个正常数m_1，当t充分大时，$x(t)\geq m_1$. 我们分两步来证明.

步骤1　由式(9)，取

$$0<m_4<\frac{r\tau-a_1\int_0^\tau y_2^*(t)\mathrm{d}t-\ln\frac{1}{1-p}}{(a+a_1a_2dMC)\tau}$$

和充分小的ε_2，使得

$$\eta \triangleq (1-p)\mathrm{e}^{r\tau - m_4(a+a_1a_2dMC)\tau - a_1\int_0^\tau (y_2^*(t)+\varepsilon_2)\mathrm{d}t} > 1,$$

$$C = \frac{1}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}}\Big[\frac{1}{r_2(r_1+d)}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau} + d\mathrm{e}^{-r_2\tau}((1-p_2)(1-\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau}) + (1-p_1\mathrm{e}^{-(r_1+d)l\tau}))(\mathrm{e}^{-r_2(1-l)\tau} - \mathrm{e}^{-(r_1+d)(1-l)\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}$$
$$-\frac{\mathrm{e}^{-r_2\tau}}{r_2(r_1+d-r_2)}\Big].$$

下面证明一定存在一点$t_1>0$，使得$x(t_1)\geq m_4$，否则

$$\dot{y}_1(t) < a_2m_4M - (r_1+d)y_1(t).$$

考虑

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_2m_4M-(r_1+d)y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) &= dy_1(t)-r_2y_2(t) \end{aligned}\right\} t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau, \\ y_i\big((n+l-1)\tau^+\big) = (1-p_1)y_i\big((n+l-1)\tau\big), \\ y_i(n\tau^+) = u_1 + y_i(n\tau),\quad i=1,2. \end{cases} \tag{10}$$

类似于(8)可以得到，当t充分大时，下面不等式成立$y_2(t) \leq y_2^*(t)+m_4a_2dMC+\varepsilon_2$. 设$t\in((n+l)\tau,(n+l+1)\tau]$，由此可以得到

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \geq x(t)\big[r-am_4-a_1(y_2^*(t)+m_4a_2dMC+\varepsilon_2)\big], & t\neq(n+l)\tau, \\ x(t^+) = (1-p)x(t), & t=(n+l)\tau. \end{cases}$$

设$(n+l)\tau\geq t_1$，在区间$((n+l)\tau,(n+l+1)\tau]$上求解上式有

$$\begin{aligned} x\big((n+l+1)\tau\big) \;&\geq\; x\big((n+l)\tau\big)(1-p)\mathrm{e}^{\int_0^\tau[r-am_4-a_1(y_2^*(t)+m_4a_2dMC+\varepsilon_2)]\mathrm{d}t} \\ &=\; x((n+l)\tau)\eta, \end{aligned}$$

于是当$k\to\infty$时，$x(n+l+k)\tau \geq x((n+l)\tau)\eta^k\to\infty$，这与$x(t)$的有界性矛盾. 因此，存在一点$t_1>0$，使得$x(t_1)\geq m_4$.

步骤2 如果$t\geq t_1$时，均有$x(t)\geq m_4$，则结论成立. 否则，令

$$t^* = \inf_{t>t_1}\big\{x(t)<m_4\big\},$$

t^*分为脉冲点和非脉冲点两种情况：

1) t^*为脉冲点. 令$t^*=(n_1+l)\tau$, $n_1\in Z_+$，则$x(t)\geq m_4$, $t\in[t_1,t^*]$，且$(1-p)m_4 < x(t^{*+}) = (1-p)x(t^*) < m_4$. 选取$n_2, n_3\in Z_+$，使得

$$n_2\tau > -\frac{1}{r_2}\ln\frac{\varepsilon_3}{C_1},\quad (1-p)^{n_2}\mathrm{e}^{n_2\tau\sigma_1}\eta^{n_3} > 1,$$

其中

$$\sigma_1 = r - am_4 - a_1M < 0,$$

$$\begin{aligned} C_1 = &(1-p_2)^{n_1}\Big(y_2(0) - \frac{u_2}{1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau}} + \frac{du_1}{r_1+d-r_2}\frac{1}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}\Big) \\ &+ \frac{d(1-p_1)^{n_1-1}(1-p_2)}{(r_1+d-r_1)(1-(1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau})}\Big(y_1(0^+) - \frac{u_1}{1-(1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}}\Big) \\ &\times \Big((1-p_2)\mathrm{e}^{-r_2\tau} + (p_2-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau - r_2\tau} - (1-p_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d)\tau}\Big). \end{aligned}$$

令$T = (n_2+n_3)\tau$，则一定存在$t_2 \in [t^*, t^*+T]$，使得$x(t_2) \ge m_4$．否则，当$t \in [t^*, t^*+T]$时，有$\dot{y}_1(t) < a_2m_4M - (r_1+d)y_1(t)$．类似于(8)可以得到，当$t \in [t^*+n_2\tau, t^*+T]$时，有

$$\left|y_2(t) - y_2^*(t) - m_4a_2dMC\right| \le C_1\mathrm{e}^{-n_2r_2\tau},$$

从而$y_2(t) \le y_2^*(t) + m_4a_2dMC + \varepsilon_3$，同步骤1类似，可得$x(t^*+T) \ge x(t^*+n_2\tau)\eta^{n_3}$．由式(2)可得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \ge x(t)(r - am_4 - a_1M) = \sigma_1 x(t), & t \ne (n+l)\tau, \\ x(t^+) = (1-p)x(t), & t = (n+l)\tau, \end{cases} \tag{11}$$

在$[t^*, t^*+n_2\tau]$上求解(11)，可得$x(t^*+n_2\tau) \ge m_4(1-p)^{n_2}\mathrm{e}^{\sigma_1 n_2\tau}$．由此可知

$$x(t^*+T) \ge m_4(1-p)^{n_2}\mathrm{e}^{\sigma_1 n_2\tau}\eta^{n_3} > m_4,$$

矛盾．令$\bar{t} = \inf\limits_{t>t^*}\{x(t) \ge m_4\}$，于是当$t \in (t^*, \bar{t}]$时，$x(t) < m_4$，且$x(\bar{t}) = m_4$．对于$t \in (t^*, \bar{t}]$，由$\dot{x}(t) \ge \sigma_1 x(t)$可知

$$x(t) \ge m_4(1-p)^{n_2+n_3}\mathrm{e}^{(n_2+n_3)\sigma_1\tau} \triangleq m_1'.$$

由于$x(\bar{t}) \ge m_4$，因此对于$t > \bar{t}$，重复上述过程可知，当$t \ge t_1$时，$x(t) \ge m_1'$.

2)　t^*不是脉冲点，则$t \in [t_1, t^*)$时，$x(t) \ge m_4$且$x(t^*) = m_4$．假设$t^* \in ((n_1'+l)\tau, (n_1'+l+1)\tau)$，对$t \in (t^*, (n_1'+l+1)\tau]$，$x(t)$的取值有两种可能：

(i)　对所有的$t \in (t^*, (n_1'+l+1)\tau]$时，$x(t) \le m_4$，则类似于情形1)可以证明一定存在一点$t_2' \in ((n_1'+l+1)\tau, (n_1'+l+1)\tau+T]$，使得$x(t_2') > m_4$．令$\tilde{t} = \inf\limits_{t>t^*}\{x(t) > m_4\}$，则$t \in (t^*, \tilde{t})$时，$x(t) \le m_4$，而$\tilde{x}(t) = m_4$．对于$t \in (t^*, \tilde{t})$，有

$$x(t) \ge m_4(1-p)^{n_2+n_3}\mathrm{e}^{(n_2+n_3+1)\sigma_1\tau} \triangleq m_1 < m_1'.$$

由于$x(\tilde{t}) \ge m_4$，重复上述过程可知当$t \ge t_1$时，$x(t) \ge m_1$.

(ii)　存在一点$t \in (t^*, (n_1'+l+1)\tau]$，使得$x(t) \ge m_4$．令$\hat{t} = \inf\limits_{t>t^*}\{x(t) \ge m_4\}$，于是$t \in [t^*, \hat{t})$时，$x(t) < m_4$且$x(\hat{t}) = m_4$．在$(t^*, \hat{t})$上有

$$x(t) \ge x(t^*)\mathrm{e}^{\sigma_1(t-t^*)} \ge m_4\mathrm{e}^{\sigma_1\tau} > m_1.$$

由$x(\hat{t}) \ge m_4$，重复上述过程可知，当$t > t_1$时，$x(t) \ge m_1$.

综上所述，当$t > t_1$时，$x(t) \ge m_1$.

4 数值模拟

这节我们考虑脉冲周期对系统的影响. 取 $a=1$, $a_1=2$, $a_2=4$, $d=8$, $m=1$, $r=2$, $r_1=0.5$, $r_2=0.8$, $p=0.1$, $p_1=0.05$, $p_2=0.05$，数值模拟如图1至图3. 由定理2.1和定理3.1可知，当脉冲周期 τ 小于 $\tau_{\max}$ 时，害虫根除周期解是全局稳定的，取 $u_1=0.1$, $u_2=0.2$, $\tau=0.2$ 如图1. 如果脉冲周期 τ 超过 $\tau_{\max}$，由定理3.1知系统(2)是持续生存的，取 $\tau=24$ 如图2. 图3是 $u_1=0.1$, u_2 从0.001增加到8时的分支图，从分支图中我们可以清楚地看出系统(2)随着 u_2 的增加出现了许多丰富的动力学行为，其中包括：拟周期震荡、倍周期分支、对称破裂分支和混沌等行为. 如果固定 $u_2=0.1$, u_1 从0.001增加到12时可以得到类似的分支图.

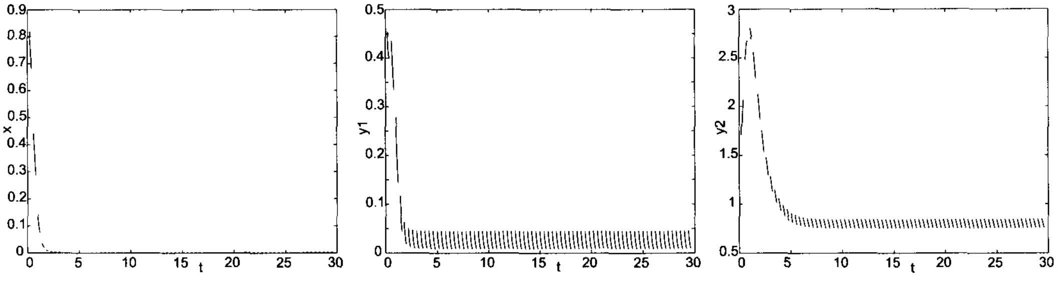

图1: 时间序列图，其中 $\tau=0.1$

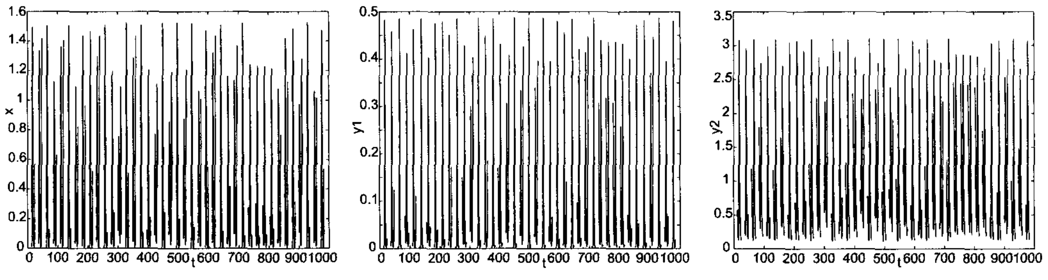

图2: 时间序列图，其中 $\tau=24$

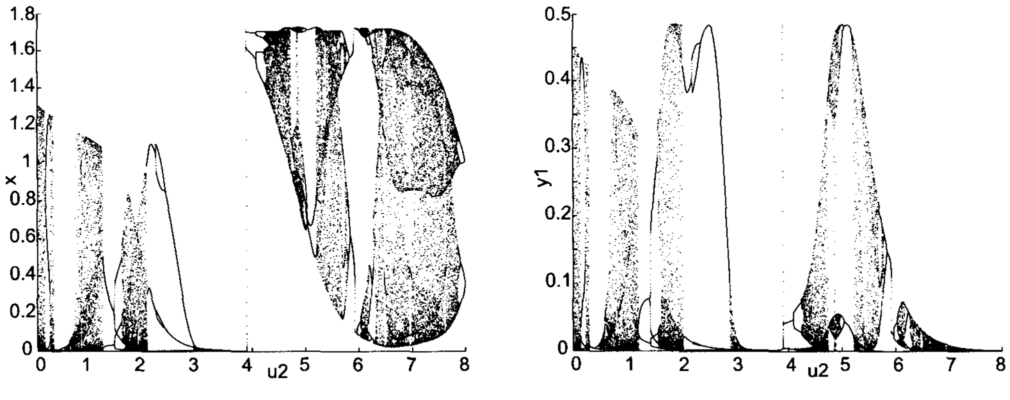

图3: 系统(1)和系统(2)关于参数 u_2 的分支图，其中 $\tau=25$

参考文献：

[1] Van Lentern J C. Integrated pest management in protected crops[C]// D Dent ed. Integrated Pest Management, London: Chapman & Hall, 1995

[2] Barclay H J. Models for pest control using predator release, habitat management and pesticide release in combination[J]. Journal of Applied Ecology, 1982, 19: 337-348

[3] 刘兵，陈兰荪，张玉娟. 基于IPM策略的捕食与被捕食系统的动力学性质[J]. 工程数学学报，2005, 22(1): 9-14
Liu B, Chen L S, Zhang Y J. The dynamics of a predator-prey system concerning integrated pest management[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(1): 9-14

[4] Wang W, Chen L. A predator-prey system with stage-structure for predator[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1997, 33: 83-91

[5] Xiao Y, Chen L. Global stability of a predator-prey system with stage structure for the predator[J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2003, 19: 1-11

[6] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solution and Applications[M]. New York: Longman, 1993

The Dynamics of a Predator-prey Model Based on Integrated Pest Management

WANG Ling-shu[1,2], XU Rui[2], FENG Guang-hui[2]

(1- School of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics & Business, Shijiazhuang 050061; 2- Institute of Applied Mathematics, Mechanical Engineering College, Shijiazhuang 050003)

Abstract: Based on the integrated pest management, a predator-prey system with impulsive effect is proposed and analyzed in this paper. By the Floquet theory and the comparison theorem of impulsive differential equation, it is proved that there exists a globally stable pest-eradication periodic solution when the impulsive period is less than some critical value. The sufficient condition for the permanence of the system is established. Numerical simulations illustrate the effect of impulsive on the dynamics of the system and the availability of our impulsive control strategy.

Keywords: integrated pest management; impulses; permanence; extinction

Received: 29 June 2009. **Accepted:** 31 Dec 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10671209; 10926064); the Scientific Research Foundation of the Education Department of Hebei Province (2009114).